

วันศุกร์ที่ ๑๐ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๘

โจทย์ข้อ ๑. จะกล่าวว่าเซตจำกัด S ของจุดในระนาบ *สมดุ* ถ้าสำหรับจุดสองจุด A และ B ใด ๆ ใน S ที่แตกต่างกัน จะมีจุด C ใน S ซึ่ง $AC = BC$ จะกล่าวว่า S *ไร้ศูนย์กลาง* ถ้าสำหรับจุดสามจุด A, B และ C ใด ๆ ใน S ที่แตกต่างกัน ไม่มีจุด P ใน S ที่ทำให้ $PA = PB = PC$

(ก) จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ ทุกจำนวน จะมีเซตสมดุที่ประกอบด้วยจุด n จุด

(ข) จงหาจำนวนเต็ม $n \geq 3$ ทั้งหมด ซึ่งจะมีเซตสมดุและไร้ศูนย์กลางที่ประกอบด้วยจุด n จุด

โจทย์ข้อ ๒. จงหาสามสิ่งอันดับ (a, b, c) ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ซึ่งแต่ละจำนวนต่อไปนี้

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

เป็นกำลังของ 2

(กำลังของ 2 คือจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป 2^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ)

โจทย์ข้อ ๓. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมซึ่ง $AB > AC$ ให้ Γ เป็นวงกลมล้อมรอบ H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ และ F เป็นจุดที่ฐานของส่วนสูงที่ลากจาก A ของรูปสามเหลี่ยมดังกล่าว ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC ให้ Q เป็นจุดบน Γ ซึ่ง $\angle HQA = 90^\circ$ และให้ K เป็นจุดบน Γ ซึ่ง $\angle HKQ = 90^\circ$ สมมติว่า A, B, C, K และ Q เป็นจุดที่แตกต่างกันทั้งหมด และอยู่บน Γ โดยเรียงในลำดับดังกล่าว

จงพิสูจน์ว่าวงกลมล้อมรอบของรูปสามเหลี่ยม KQH และ FKM สัมผัสซึ่งกันและกัน

วันเสาร์ที่ ๑๑ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๘

โจทย์ข้อ ๔. รูปสามเหลี่ยม ABC มีวงกลมล้อมรอบ Ω ที่มีจุดศูนย์กลางคือ O วงกลม Γ ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง A ตัดส่วนของเส้นตรง BC ที่จุด D และ E โดยที่จุด B, D, E และ C แตกต่างกันทั้งหมด และอยู่บนเส้นตรง BC ในลำดับดังกล่าว ให้ F และ G เป็นจุดตัดของ Γ และ Ω โดยที่ A, F, B, C และ G อยู่บน Ω ในลำดับนี้ ให้ K เป็นจุดตัดที่สองของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม BDF กับส่วนของเส้นตรง AB ให้ L เป็นจุดตัดที่สองของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม CGE กับส่วนของเส้นตรง CA

สมมติว่าเส้นตรง FK และ GL แตกต่างกันและตัดกันที่จุด X จงพิสูจน์ว่า X อยู่บนเส้นตรง AO

โจทย์ข้อ ๕. ให้ \mathbb{R} เป็นเซตของจำนวนจริง จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

โจทย์ข้อ ๖. ให้ a_1, a_2, \dots เป็นลำดับของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ สำหรับทุก $j \geq 1$

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ สำหรับทุก $1 \leq k < \ell$

จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก b และ N ซึ่ง

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม m และ n ซึ่ง $n > m \geq N$